KAP 5/12

Milan Mroczkowski
YESIT.CZ

FUNKCE je zobrazení, množina definiční obor (D) se zobrazí do množiny oboru hodnot (H).

DEFINIČNÍ OBOR – vstupní informace
OBOR HODNOT – výstupní informace

Funkce může být zadaná: TABULKOU
PŘEDPISEM
GRAFEM (obrázkem)

My používáme KARTÉRSKÝ SOUČIN = speciální sled souřadnic.

Jestli někdo bude chtít funkční hodnotu v bodě (hodnotu funkce), tak pro daný prvek v množině definičního oboru chce tu hodnotu z množiny oboru hodnot. A vypočítá se to jako hodnota výrazu. Výsledkem je <u>číslo</u>.

Pokud bych chtěl sečíst dvě funkce, výsledkem je <u>funkce</u>.

1) Funkce je dána $f: y = x^3$
Chci vypočítat funkční hodnotu v bodě tři. $f(3)$

$f: y = x^3$ $\quad f(3)$

$y = 3^3$

$y = \underline{\underline{27}}$ ← číslo je výsledkem

$\underline{\underline{f(3) = 27}}$

2) Funkce je dána $g: y = 2x - 3$
Chci vypočítat funkční hodnotu ve funkční hodnotě pro dvojku, (je to složená hodnota), proto počítám postupně, začínám vnitřkem závorky.

$\boxed{g: y = 2x - 3 \qquad g(g(2))}$

$g(2)$ $\quad y = 2 \cdot 2 - 3$

$y = \underline{1}$

$g(1)$ $\quad y = 2 \cdot 1 - 3$

$y = \underline{\underline{-1}}$

$\underline{\underline{g(g(2)) = -1}}$

VLASTNOSTI FUNKCÍ

SUDÁ FCE - osově souměrná podle osy y.
(např.: $f: y = x^2$)

LICHÁ FCE - středově souměrná, [0;0] je střed
(např.: $f: y = x^3$)

ROSTOUCÍ FCE - půjdu po fci zleva do prava, tak půjdu po rovině nebo do kopce

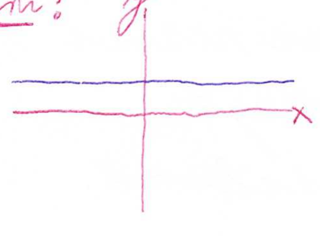
OSTŘE ROSTOUCÍ FCE - půjdu po fci zleva do prava, tak půjdu pouze do kopce.

KLESAJÍCÍ FCE - půjdu po fci z prava do leva, tak půjdu po rovině nebo z kopce.

OSTŘE KLESAJÍCÍ FCE - půjdu po fci z prava do leva, tak půjdu pouze z kopce.

MONOTONOST - definuji na nějakém celém intervalu buď na Df nebo na určitém intervalu: zda je ostře rostoucí, rostoucí, klesající, ostře klesající

není:



$\boxed{\text{Je funkce } f: y = x^2 \text{ sudá?}}$

Jestliže je sudá, tak platí $f(-x) = f(x)$.

$$f(-x)^2 = (x)^2$$

$$\underline{x^2 = x^2} \implies$$

JE ROVNOST - - JE SUDÁ

$\boxed{\text{Je funkce } f: y = x^3 \text{ lichá?}}$

Jestliže je lichá, tak platí $f(-x) = -f(x)$.

$$f(-x)^3 = -(x)^3$$

$$\underline{-x^3 = -x^3} \implies$$

JE ROVNOST - - JE LICHÁ

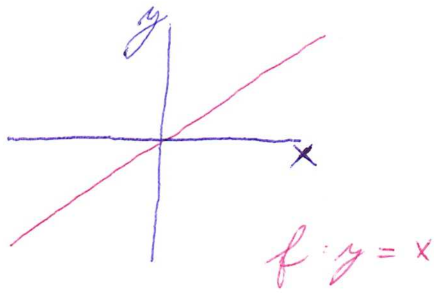
FUNKCE LINEÁRNÍ - graf popisuje přímka, monotónní na celém intervalu.

KVADRATICKÁ FCE - monotónní jen na určitých intervalech - rostoucí a klesající se střídá.

PERIODICITA - existuje nějaké číslo, takové, že když do sinus dosazujeme reálná čísla, tak se funkce opakuje.

(Sinus má perioda 2π, je to nejkratší vzdálenost kdy se funkce opakuje)

$y = x$

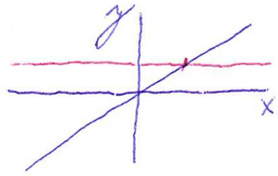


DEFINIČNÍ OBOR	R
OBOR HODNOT	R
MONOTONOST	OSTŘE ROSTOUCÍ
SUDÁ, LICHÁ	LICHÁ
OMEZENOST	NE
MAXIMUM, MINIMUM	NE
PERIODICITA	NE
PROSTÁ	ANO

OBOR HODNOT – je množina osy y

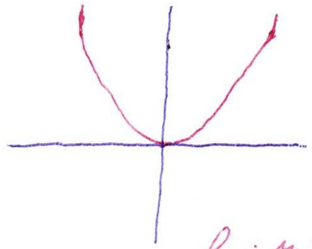
LICHÁ – protože je souměrná podle středu.

PROSTÁ – udělám kolmici kdekoliv na ose y, protne jen jeden bod.
– jestliže si vezmu libovolné číslo z oboru hodnot, tedy z osy y, tak najdu právě jedno číslo osy x z definičního oboru (udělal jsem rovnoběžku s osou x)



DEFINIČNÍ OBOR – je množina osy x. R – na osu x můžu dosadit jakékoliv číslo.

$y = x^2$



$f: y = x^2$

DEFINIČNÍ OBOR	R
OBOR HODNOT	R_0^+
MONOTONOST	$Df = R^+$ ROSTOUCÍ $Df = R^-$ KLESAJÍCÍ
SUDÁ, LICHÁ	SUDÁ
OMEZENOST	ZDOLA OMEZENÁ
MAXIMUM, MINIMUM	$M_i = [0, 0]$ MÁ MINIMUM
PERIODICITA	NE
PROSTÁ	NE

R_0^+ reálná čísla kladná včetně nuly

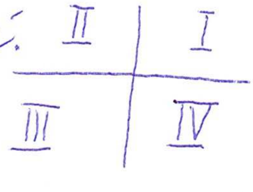
Je monotónní na celém definičním oboru?

Není.

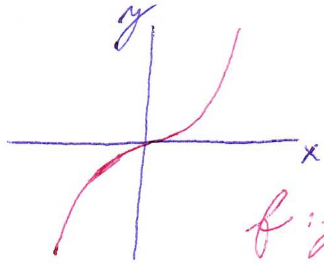
Jak si rozdělíš definiční obor, aby byla na oboru hodnot monotónní?

Na kladný a záporný.

SUDÁ: Když vezmeme první kvadrant a překlopíly podle osy y, tak dostaneme graf viz výše, funkce je sudá.

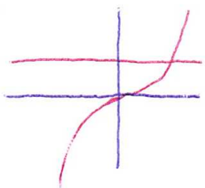


$y = x^3$

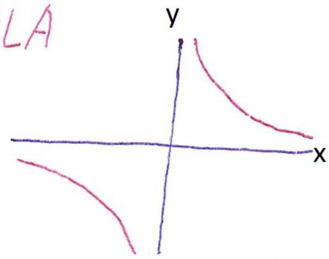


$f: y = x^3$

DEFINIČNÍ OBOR	R
OBOR HODNOT	R
MONOTONOST	OSTŘE ROSTOUCÍ
SUDÁ, LICHÁ	LICHÁ
OMEZENOST	NE
MAXIMUM, MINIMUM	NE
PERIODICITA	NE
PROSTÁ	ANO

PROSTÁ  protne v jednom bodě

HYPERBOLA



$$y = \frac{1}{x}$$

DEFINIČNÍ OBOR	$R \setminus \{0\}$
OBOR HODNOT	$R \setminus \{0\}$
MONOTONOST	OSTŘE KLESAJÍCÍ
SUDÁ, LICHÁ	LICHÁ
OMEZENOST	NE
MAXIMUM, MINIMUM	NE
PERIODICITA	NE
PROSTÁ	ANO

LICHÁ - souměrná podle středu

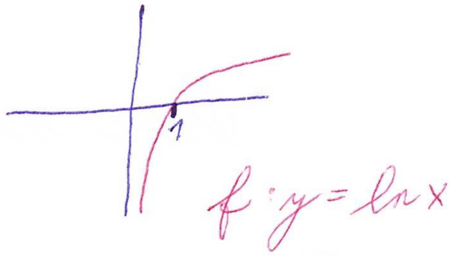
OMEZENOST - omezenost počátku (na nule) se nepočítá.

$R \setminus \{0\}$ všechny reálná čísla bez nuly

ZNAMENÁ MÍNUS

Blíží se k nule, ale nulu nebude nikdy mít.

$y = \ln x$

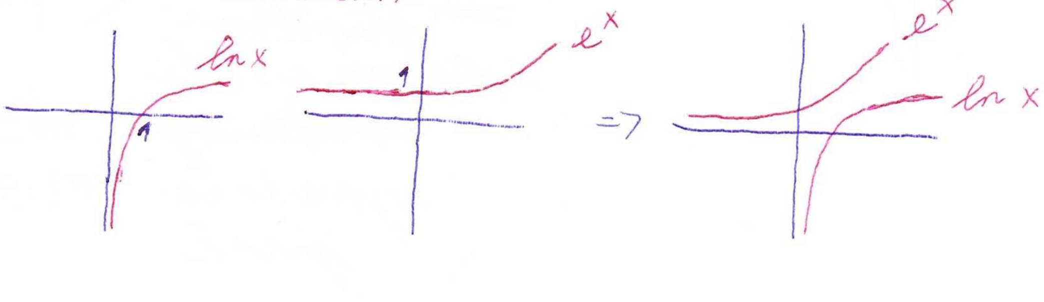


DEFINIČNÍ OBOR	R^+
OBOR HODNOT	R
MONOTONOST	OSTŘE ROSTOUCÍ
SUDÁ, LICHÁ	NIC
OMEZENOST	NE
MAXIMUM, MINIMUM	NE
PERIODICITA	NE
PROSTÁ	ANO

NENÍ SUDÁ ANI LICHÁ; tedy nic.

Funkce $f: y = \ln x$ a $f: y = e^x$ jsou navzájem inverzní.

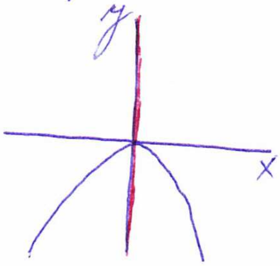
	$y = \ln x$		$y = e^x$
DEF. OBOR	R^+		R
OBOR HODNOT	R	(PROHOZENÝ)	R^+



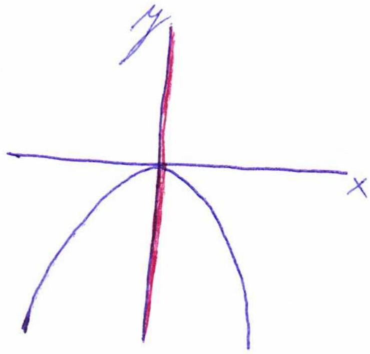
Proč není sudá ani lichá?

POKUD JE FUNKCE SUDÁ, TAK JE OSOVĚ SOUMĚRNÁ PODLE OSY Y

např.:

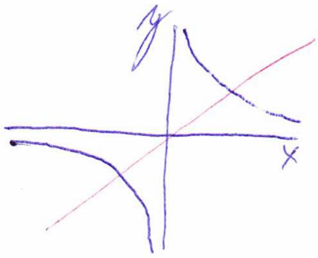


⇒ PŘEKLOPÍM PODLE OSY Y

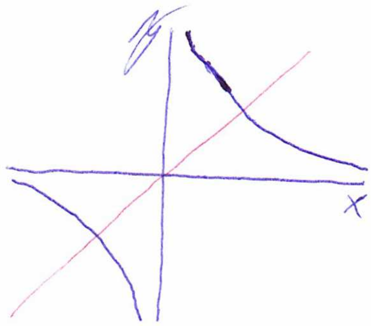


NIC NEPŘIBYLO
VYPADÁ STEJNĚ

POKUD JE FUNKCE LICHÁ, TAK JE STŘEDOVĚ SOUMĚRNÁ

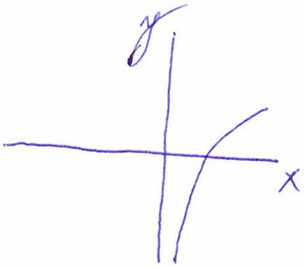


⇒ ~~PŘEKLOPÍM~~ PODLE STŘEDU

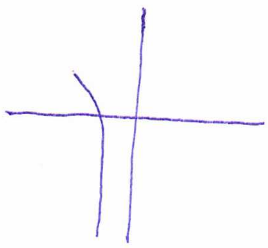


NIC NEPŘIBYLO
VYPADÁ STEJNĚ

POKUD FCI $f: y = \ln x$ překlopím

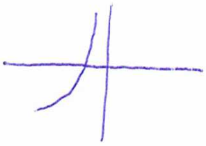


⇒ např. podle y



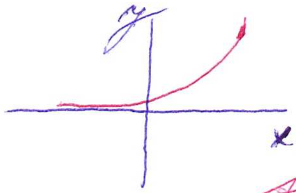
VYPADÁ JINAK

⇒ podle středu



VYPADÁ JINAK

$y = e^x$

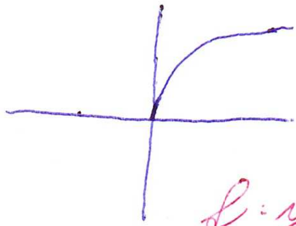


$f: y = e^x$

DEFINIČNÍ OBOR	R
OBOR HODNOT	R^+
MONOTONOST	OSTŘE ROSTOUCÍ
SUDÁ, LICHÁ	NIC
OMEZENOST	ZDOLA
MAXIMUM, MINIMUM	NE
PERIODICITA	NE
PROSTÁ	ANO

MAXIMUM, MINIMUM – pro tuto funkci: funkce se k nule přibližuje, ale nikdy se jí nedotkne

$y = \sqrt{x}$



$f: y = \sqrt{x}$

DEFINIČNÍ OBOR	R_0^+
OBOR HODNOT	R_0^+
MONOTONOST	OSTŘE ROSTOUCÍ
SUDÁ, LICHÁ	NIC
OMEZENOST	ZDOLA
MAXIMUM, MINIMUM	$M_i = [0;0]$ MÁ MINIMUM
PERIODICITA	NE
PROSTÁ	ANO

myšlenka: $\sqrt{0} = 0$

Vhodné vědět:

- JESTLIŽE NENÍ OMEZENÁ, NEMŮŽE MÍT MAXIMUM A MINIMUM.
- KDYBY MĚL OBOR HODNOT INTERVAL, TAK JE OMEZENÁ
- KDYŽ MÁ MINIMUM NEBO MAXIMUM, TAK JE VŽDY OMEZENÁ

$y = \sin x$

DEFINIČNÍ OBOR	R
OBOR HODNOT	$\langle -1, 1 \rangle$
MONOTONOST	$\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle + k \cdot 2\pi$ ROSTOUCÍ, $\langle \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \rangle + k \cdot 2\pi$ KLESAJÍCÍ
SUDÁ, LICHÁ	LICHÁ
OMEZENOST	ZDOLA i ZHORA
MAXIMUM, MINIMUM	MAX $= [\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, 1]$ MIN $= [-\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, -1]$
PERIODICITA	ANO 2π
PROSTÁ	NE

OBOR HODNOT – sde nestoupne nad jedničku,
nikdy i neklesne pod −1.

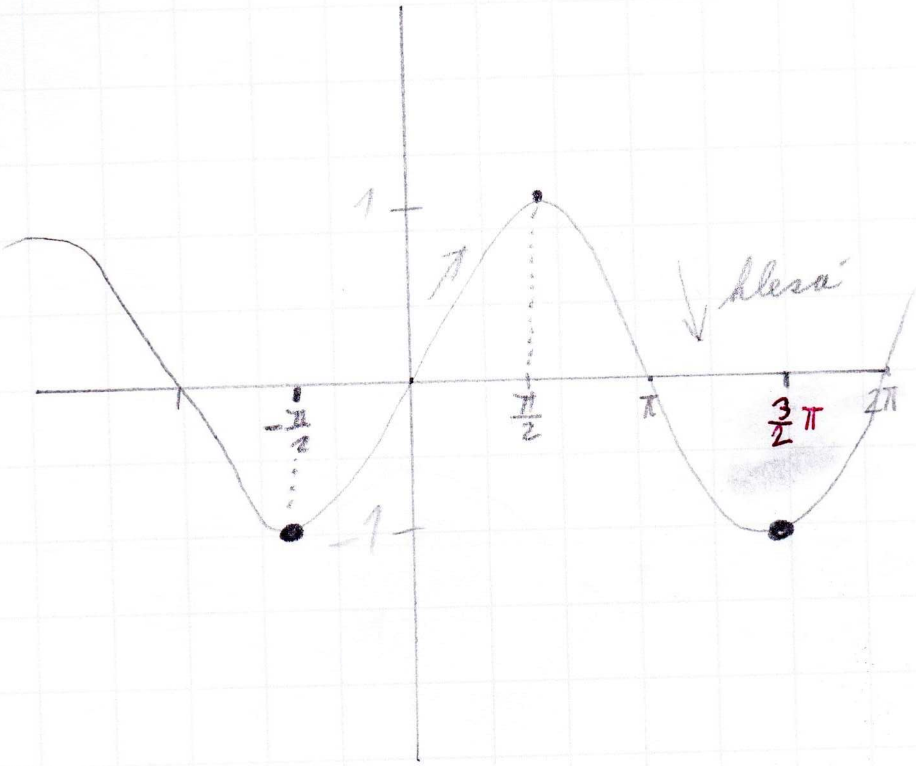
PERIODICITA – 2π, je to nejmenší definiční obor
na kterém se ta funkce neopakuje

MONOTONOST

- Kolik bodů dosahuje maxima? NEKONEČNĚ MNOHO

My to zapíšeme pomocí periody:
Od $-\frac{\pi}{2}$ je funkce rostoucí, až kam je rostoucí?
Je rostoucí do $\frac{\pi}{2}$ ⇒ na tomhle intervalu je
rostoucí a opakuje se po 2π.

f : y = sin x



$f: y = \sin x$

MAXIMUM, MINIMUM

- Napiš libovolnou hodnotu x při kterém to dosahuje maxima.

$\frac{\pi}{2} + k \cdot \underbrace{2\pi}_{\text{perioda}}$

k tomu se to opakuje, proto napíši plus, jdeme do prava

k - jsou celá čísla a další bod o 2π větší a další bod o 2π větší atd.

- Vyberu si libovolný bod kdy dosahuje minima, např.: $-\frac{\pi}{2}$

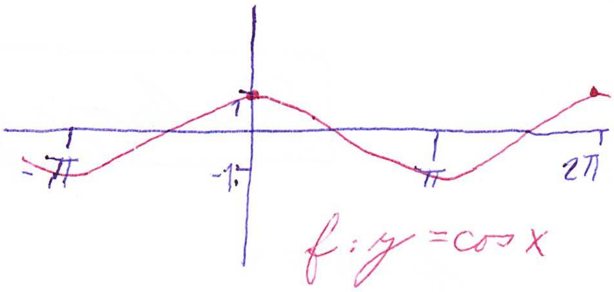
$-\frac{\pi}{2} - k \cdot 2\pi$

půjdeme do leva

- Jaký existuje vztah mezi periodicitou a prostotou funkce?

Vždy když je periodická funkce, tak není prostá, protože se tam opakuje hodnota.

cos x



DEFINIČNÍ OBOR	R
OBOR HODNOT	$\langle -1, 1 \rangle$
MONOTONOST	ROSTOUCÍ $\langle -\pi; 0 \rangle + k \cdot 2\pi$ KLESAJÍCÍ $\langle 0, \pi \rangle + k \cdot 2\pi$
SUDÁ, LICHÁ	SUDÁ
OMEZENOST	ANO
MAXIMUM, MINIMUM	MAX = $[0 + k \cdot 2\pi, 1]$ MIN = $[-\pi + k \cdot 2\pi, -1]$
PERIODICITA	ANO 2π
PROSTÁ	NE

Omezená, protože je omezený obor hodnot.

- Má sin x a cos x stejnou periodu?

  Ano, pořád 2π

- Neprochází počátkem $[0, 0]$, není souměrná podle středu.

- Je osově souměrná podle osy y.

Sestroj grafy následujících funkcí:

$f: y = x$

$f: y = x^2$

$f: y = x^3$

$f: y = \frac{1}{x}$

$f: y = \ln x$

$f: y = e^x$

$f: y = \sqrt{x}$

$f: y = \sin x$

$f: y = \cos x$

Poznámka: ideálně sestrojit na milimetrový papír.